10292. Моортал Каубат

Бесси уже долгое время играет в популярную игру Moortal Cowmbat. Однако недавно разработчики выпустили обновление, которое вынудило её изменить привычный стиль игры.

В игре используется *m* кнопок, обозначенных первыми *m* строчными буквами латинского алфавита. Любимая комбинация ходов Бесси – это строка *s* длины *m*, описывающая последовательность нажатий кнопок. После обновления каждое комбо должно состоять из последовательности “полос”, где полоса определяется как непрерывная последовательность нажатий одной и той же кнопки длиной не менее *k*. Бесси хочет изменить свою любимую комбинацию так, чтобы получить новую строку той же длины *n*, но состоящую из полос, удовлетворяющих новым правилам.

Известно, что Бесси требуется *aij* дней, чтобы научиться нажимать кнопку *j* вместо кнопки *i* в любом конкретном месте комбинации (то есть замена одной буквы *i* в строке *s* на букву *j* стоит *aij* дней).

Обратите внимание, что иногда замена может быть выполнена быстрее через промежуточные кнопки: например, переход с *i* на *j* напрямую может быть дороже, чем последовательные замены *i* → *k* → *j*. Таким образом, может существовать цепочка преобразований из *i* в *j*, имеющая меньшую общую стоимость, чем прямая замена.

Помогите Бесси определить минимальное количество дней, необходимое для создания комбинации, удовлетворяющей новым требованиям.

**Вход.** Первая строка содержит три числа: *n* (1 ≤ *n* ≤ 105), *m* (1 ≤ *m* ≤ 26) и *k* (1 ≤ *k* ≤ *n*).

Вторая строка содержит строку *s*.

Далее следуют *m* строк, каждая из которых содержит *m* целых чисел – элементы матрицы *aij*, где *aij* – это количество дней, необходимых для замены кнопки *i* на кнопку *j*. Гарантируется, что 0 ≤ *aij* ≤ 1000 и *aii* = 0 для всех *i*.

**Выход.** Выведите минимальное количество дней, необходимое Бесси для создания комбинации, соответствующей новым правилам.

|  |  |
| --- | --- |
| **Пример входа** | **Пример выхода** |
| 5 5 2abcde0 1 4 4 42 0 4 4 46 5 0 3 25 5 5 0 43 7 0 5 0 | 5 |

## РЕШЕНИЕ

**динамическое программирование**

# Анализ алгоритма

Запустим алгоритм Флойда-Уоршелла на матрице *aij*, чтобы определить кратчайшее время замены каждой буквы на любую другую букву.

Составим матрицу стоимостей *cst* такую что *cst*[*i*][*j*] (1 ≤ *i* ≤ *n*) содержит наименьшее количество дней, за которое можно изменить букву *s*[*i* – 1] на букву *j*.

Для удобства дальнейших вычислений построим матрицу *ps*, содержащую значения частичных сумм матрицы стоимостей *cst* по столбцам:

*ps*[*i*][*j*] = *cst*[*i*][1] + *cst*[*i*][2] + … + *cst*[*i*][*j*]

Пусть *dp*[*i*][*j*] содержит наименьшее количество дней, за которое можно преобразовать первые *i* букв строки *s* в строку, удовлетворяющую новым требованиям Бесси, причем последние *k* букв в новой строке будут буквой *j*.

Запишем уравнения динамики:

* Пусть первая *i* – 1 буква строки *s* уже преобразована в строку, в которой последними *k* буквами стоит буква *j*. Тогда мы просто изменяем букву s[*i* – 1] на *j*, что можно сделать за *cst*[*i*][*j*] дней.

*dp*[*i*][*j*] = *dp*[*i* – 1][*j*] + *cst*[*i*][*j*]

* Чтобы в новой строке последними *k* буквами была буква *j*, рассмотрим значения *dp*[*i* – *k*][0], *dp*[*i* – *k*][1], …, *dp*[*i* – *k*][*m* – 1]. Выберем среди них наименьшее. То есть преобразуем первые *i* – *k* букв строки *s* в строку, удовлетворяющую новым требованиям Бесси (при этом нам не важна буква, которой будет оканчиваться подстрока длины *i* – *k*, нам важно чтобы эту строку получить за наименьшее количество дней). После чего *k* последних букв *s*[*i* – *k*], *s*[*i* – *k* + 1], …, , *s*[*i* – 1] исходной строки *s* меняем на букву *j*, на что уйдет *cst*[*i* – *k* + 1][*j*] + *cst*[*i* – *k* + 2][*j*] + … + *cst*[*i*][*j*] дней. Указанную сумму можно вычислить за константное время, используя массив префиксов *ps*:

*cst*[*i* – *k* + 1][*j*] + *cst*[*i* – *k* + 2][*j*] + … + *cst*[*i*][*j*] = *ps*[*i*][*j*] – *ps*[*i* – *k*][*j*]

Будем поддерживать дополнительный массив *mn*, где

*mn*[*i*] = min(*dp*[*i*][0], *dp*[*i*][1], …, *dp*[*i*][*m* – 1])

Таким образом, уравнение динамики для этого случая (*i* ≥ *k*) будет иметь вид:

*dp*[*i*][*j*] = *ps*[*i*][*j*] – *ps*[*i* – *k*][*j*] + *mn*[*i* – *k*]

Остается среди двух вариантов для *dp*[*i*][*j*] выбрать наименьшее.

Ответом на задачу будет значение

*mn*[*n*] = min(*dp*[*n*][0], *dp*[*n*][1], …, *dp*[*n*][*m* – 1])

Нам не важно, на какие именно *k* букв заканчивается новое слово Бесси.

**Пример**

В данном примере оптимальное решение заключается в следующем: заменить *a* на *b*, затем *d* на *e*, а после этого обе *e* – на *c*. Общая стоимость изменений составит 1 + 4 + 0 + 0 = 5 дней, а итоговая строка будет иметь вид *bbccc*.

**Реализация алгоритма**

Объявим рабочие массивы.

#define MAXN 100005

#define ALPH 26

int d[ALPH][ALPH], cst[MAXN][ALPH], ps[MAXN][ALPH], dp[MAXN][ALPH],

 mn[MAXN];

Читаем входные данные.

cin >> n >> m >> k;

cin >> s;

for (i = 0; i < m; i++)

for (j = 0; j < m; j++)

 cin >> d[i][j];

Запускаем алгоритм Флойда-Уоршелла на матрице *d*. По его завершению d[*i*][*j*] содержит наименьшее количество дней, за которое можно изменить букву *i* на букву *j*.

for (x = 0; x < m; x++)

for (i = 0; i < m; i++)

for (j = 0; j < m; j++)

 d[i][j] = min(d[i][j], d[i][x] + d[x][j]);

У нас имеется *m* ≤ 26 букв. Составим матрицу стоимостей *cst* такую что *cst*[*i*][*j*] (1 ≤ *i* ≤ *n*) содержит наименьшее количество дней, за которое можно изменить букву *s*[*i* – 1] на букву *j*. Индексация букв в строке *s* начинается с 0.

Для удобства дальнейших вычислений построим матрицу *ps*, содержащую значения частичных сумм матрицы стоимостей *cst* по столбцам:

*ps*[*i*][*j*] = *cst*[*i*][1] + *cst*[*i*][2] + … + *cst*[*i*][*j*]

for (i = 1; i <= n; i++)

for (j = 0; j < m; j++)

{

 cst[i][j] = d[s[i - 1] - 'a'][j];

 ps[i][j] = ps[i - 1][j] + cst[i][j];

}

Инициализируем массивы.

memset(dp, 0x3f, sizeof dp);

memset(mn, 0x3f, sizeof mn);

mn[0] = 0;

Вычисляем значения ячеек массива *dp*. Букве *i* соответствует символ *s*[*i* – 1]. Нумерация букв в переменной *j* идет от 0 (которой соответствует буква ‘*a*’) до *m* – 1.

for (i = 1; i <= n; i++)

for (j = 0; j < m; j++)

{

Букву исходной строки *s*[*i* – 1] меняем на *j*.

 dp[i][j] = min(dp[i][j], dp[i - 1][j] + cst[i][j]);

 if (i >= k)

 dp[i][j] = min(dp[i][j], ps[i][j] - ps[i - k][j] + mn[i - k]);

 mn[i] = min(mn[i], dp[i][j]);

}

Выводим ответ.

cout << mn[n] << "\n";